

第2章 | 空間のベクトル



2章

空間のベクトル

1 空間の点

まとめ

1 座標軸と座標平面

空間に点 O をとり、 O で互いに直交する3本の数直線を図のように定める。

これらを、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸 といい、まとめて座標軸 という。

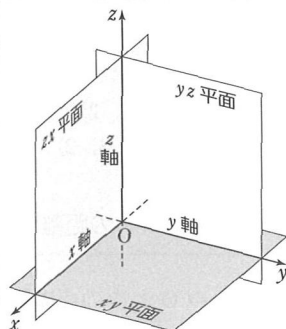
また、点 O を 原点 という。さらに

x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面、

y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面、

z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面

といい、これらをまとめて 座標平面 という。



2 点の座標

空間の点 P に対して、 P を通り各座標軸に垂直な平面が x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点を、それぞれ A 、 B 、 C とする。

A 、 B 、 C の各座標軸上での座標が、それぞれ a 、 b 、 c のとき、3つの実数の組

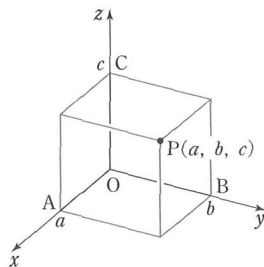
$$(a, b, c)$$

を点 P の 座標 といい、 a 、 b 、 c をそれぞれ点 P の x 座標、 y 座標、 z 座標 という。

この点 P を $P(a, b, c)$ と書くことがある。

原点 O と図の点 A 、 B 、 C の座標は $O(0, 0, 0)$ 、 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, b, 0)$ 、 $C(0, 0, c)$ である。

座標の定められた空間を 座標空間 という。



3 原点 O と点 P の距離

原点 O と点 $P(a, b, c)$ の距離は

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

A 空間の点の座標

教 p.51

練習

1

点 $P(1, 3, 2)$ に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) yz 平面に関して対称な点 (2) zx 平面に関して対称な点
 (3) z 軸に関して対称な点 (4) 原点に関して対称な点

指針 対称な点の座標 点 $P(a, b, c)$ に対して

- (1) yz 平面に関して対称な点の座標は $(-a, b, c)$
 (2) zx 平面に関して対称な点の座標は $(a, -b, c)$
 (3) z 軸に関して対称な点の座標は $(-a, -b, c)$
 (4) 原点に関して対称な点の座標は $(-a, -b, -c)$

解答 (1) $(-1, 3, 2)$ 答 (2) $(1, -3, 2)$ 答
 (3) $(-1, -3, 2)$ 答 (4) $(-1, -3, -2)$ 答

B 原点 O と点 P の距離

教 p.51

練習

2

原点 O と次の点の距離を求めよ。

- (1) $P(2, 3, 6)$ (2) $Q(3, -4, 5)$

指針 原点 O と点 P の距離 原点 O と点 $P(a, b, c)$ の距離は

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

解答 (1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$
 $= \sqrt{49} = 7$ 答

(2) $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}$
 $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ 答

2 空間のベクトル

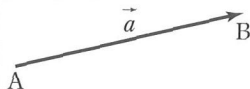
まとめ

1 空間のベクトル

空間において、始点を A、終点を B とする有向線分 AB が表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表す。また、 $\overrightarrow{AB}$ の大きさを $|\overrightarrow{AB}|$ で表す。

空間のベクトルも $\vec{a}$, $\vec{b}$ などで表すことがある。

このとき、 $\vec{a} = \vec{b}$ や、 $\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ の定義は、平面上の場合と同様である。



2 零ベクトル

大きさが0のベクトルを 零ベクトル またはゼロベクトルといい、 $\vec{0}$ で表す。

3 単位ベクトル

大きさが1のベクトルを 単位ベクトル という。

4 空間のベクトルの和, 差, 実数倍

空間のベクトルの和, 差, 実数倍の定義も, 平面上の場合と同様である。さらに, 平面上のベクトルについて成り立つ性質は, 空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ。

5 平行六面体

2つずつ平行な3組の平面で囲まれる立体を 平行六面体 という。直方体も平行六面体である。平行六面体の各面は, 平行四辺形である。

6 ベクトルの分解

空間において, 同じ平面上にない4点O, A, B, Cが与えられたとき, $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とすると, この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も, 適当な実数 s, t, u を用いて, $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表すことができる。しかも, この表し方はただ1通りである。なお, 空間におけるこのような3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立であるという。

注意 一直線上にない3点O, A, Bを通る平面は, ただ1つ定まる。この平面を, 平面OABということがある。

A 空間のベクトル

練習
3

教 p.52

教科書の例2において, $\vec{AE}$ に等しいベクトルで $\vec{AE}$ 以外のものをすべてあげよ。また, $\vec{AD}$ の逆ベクトルで $\vec{DA}$ 以外のものをすべてあげよ。

指針 等しいベクトル・逆ベクトル 等しいベクトルは, 向きが同じで大きさが等しいベクトルである。逆ベクトルは向きが反対で大きさが等しいベクトルである。よって, 辺AE, ADとそれぞれ平行な辺について考える。

解答 辺AEに平行な辺は 辺BF, CG, DH

よって, $\vec{AE}$ に等しいベクトルは

$\vec{BF}, \vec{CG}, \vec{DH}$ 答

また, 辺ADに平行な辺は 辺BC, FG, EH

よって, $\vec{AD}$ の逆ベクトルは, $\vec{AD}$ と向きが反対で大きさが等しいベクトルであるから

$\vec{CB}, \vec{GF}, \vec{HE}$ 答

練習
4

教科書の例3の直方体において、次の□に適する頂点の文字を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\Box}$$

$$(2) \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\Box D}$$

指針 ベクトルの和・差 等しいベクトルを見つけ、平面上のベクトルを考えるようにする。たとえば、 $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ であるから、 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ は $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ と等しく、平面 ABCD 上で考えることができる。

解答 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{AC}$ 答 C

(2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
 $= \overrightarrow{BD}$ 答 B

B ベクトルの分解

練習
5

教科書の例題1において、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

$$(1) \overrightarrow{EC}$$

$$(2) \overrightarrow{BH}$$

$$(3) \overrightarrow{DF}$$

$$(4) \overrightarrow{HF}$$

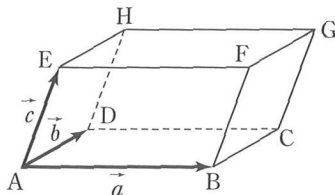
指針 平行六面体 解答の図の平行六面体で、ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と等しいベクトルは、それぞれ3つずつある。たとえば、 $\vec{a}$ と等しいベクトルは、 $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$ である。このことを利用して、それぞれのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表す。

解答 (1) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}$
 $= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA}$
 $= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 答

(2) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}$
 $= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
 $= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
 $= -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 答

(3) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}$
 $= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
 $= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ 答

(4) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$
 $= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
 $= \vec{a} - \vec{b}$ 答



別解 (2) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$
 $= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned}
 &= -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \text{答} \\
 (3) \quad \vec{DF} &= \vec{DB} + \vec{BF} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BF} \\
 &= -\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AE} \\
 &= -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \quad \text{答} \\
 (4) \quad \vec{HF} &= \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

3 ベクトルの成分

まとめ

1 基本ベクトルと成分

O を原点とする座標空間において、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを基本ベクトルといい、それぞれ $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ で表す。

座標空間のベクトル $\vec{a}$ に対し、 $\vec{a} = \vec{OA}$ である点 A の座標が

$$(a_1, a_2, a_3)$$

のとき、 $\vec{a}$ は次のように表される。

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

この $\vec{a}$ を、次のようにも書く。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①における a_1 、 a_2 、 a_3 を、それぞれ $\vec{a}$ の x 成分、 y 成分、 z 成分といい、まとめて $\vec{a}$ の成分という。また、①を $\vec{a}$ の成分表示という。

空間の基本ベクトル $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ の成分表示は、次のようになる。

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

空間の零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は、 $\vec{0} = (0, 0, 0)$ である。

2 ベクトルの相等

空間の2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について、次が成り立つ。

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

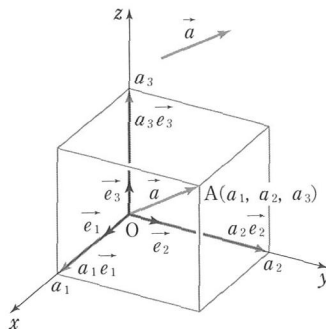
3 ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

4 和、差、実数倍の成分表示

平面上の場合と同様に、空間のベクトルの和、差、実数倍の成分表示について、次のことが成り立つ。



$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad \text{ただし, } k \text{ は実数}$$

5 2点A, Bとベクトル $\overrightarrow{AB}$

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

A ベクトルの成分表示

教 p.55

練習 6

次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が等しくなるように, x, y, z の値を定めよ。

$$\vec{a} = (2, -1, -3), \quad \vec{b} = (x-4, y+2, -z+1)$$

指針 ベクトルの相等と成分表示 空間の2つのベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ について}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

が成り立つ。

解答 $\vec{a} = \vec{b}$ であるための条件は

$$2 = x - 4, \quad -1 = y + 2, \quad -3 = -z + 1$$

よって $x = 6, y = -3, z = 4$ 答

教 p.56

練習 7

次のベクトルの大きさを求めよ。

$$(1) \vec{a} = (1, 2, -2)$$

$$(2) \vec{b} = (-5, 3, -4)$$

指針 ベクトルの成分と大きさ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

解答 (1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ 答

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \text{答}$$

B 和, 差, 実数倍の成分表示

教 p.57

練習 8

$\vec{a} = (1, 3, -2)$, $\vec{b} = (4, -3, 0)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ。

$$(1) \vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b}$$

$$(3) 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$(4) -3(\vec{a} - 2\vec{b})$$

指針 成分によるベクトルの計算 まとめの計算規則により計算する。

(4) 先に()をはずしても、先に()の中を計算してもよい。

$$\begin{aligned}\text{解答 (1)} \quad \vec{a} + \vec{b} &= (1, 3, -2) + (4, -3, 0) \\ &= (1+4, 3+(-3), -2+0) \\ &= (5, 0, -2) \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad \vec{a} - \vec{b} &= (1, 3, -2) - (4, -3, 0) \\ &= (1-4, 3-(-3), -2-0) \\ &= (-3, 6, -2) \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(3)} \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2(1, 3, -2) + 3(4, -3, 0) \\ &= (2 \times 1, 2 \times 3, 2 \times (-2)) + (3 \times 4, 3 \times (-3), 3 \times 0) \\ &= (2, 6, -4) + (12, -9, 0) \\ &= (2+12, 6+(-9), -4+0) \\ &= (14, -3, -4) \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(4)} \quad -3(\vec{a} - 2\vec{b}) &= -3\vec{a} + 6\vec{b} \\ &= -3(1, 3, -2) + 6(4, -3, 0) \\ &= (-3 \times 1, -3 \times 3, -3 \times (-2)) + (6 \times 4, 6 \times (-3), 6 \times 0) \\ &= (-3, -9, 6) + (24, -18, 0) \\ &= (-3+24, -9+(-18), 6+0) \\ &= (21, -27, 6) \quad \text{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{別解 (4)} \quad -3(\vec{a} - 2\vec{b}) &= -3\{(1, 3, -2) - 2(4, -3, 0)\} \\ &= -3\{(1, 3, -2) - (2 \times 4, 2 \times (-3), 2 \times 0)\} \\ &= -3\{(1, 3, -2) - (8, -6, 0)\} \\ &= -3(1-8, 3-(-6), -2-0) \\ &= -3(-7, 9, -2) \\ &= (-3 \times (-7), -3 \times 9, -3 \times (-2)) \\ &= (21, -27, 6) \quad \text{答}\end{aligned}$$

C 座標空間の点とベクトル

教 p.57

練習
9

次の2点A, Bについて, $\overrightarrow{AB}$ を成分表示し, $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4), B(3, -1, 5)

(2) A(3, 0, -2), B(1, -4, 2)

指針 ベクトルの成分と大きさ $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\end{aligned}$$

解答 (1) $\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-1, 5-4)$

$$= (1, -2, 1) \quad \text{答}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{6} \quad \text{答}$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (1-3, -4-0, 2-(-2))$

$$= (-2, -4, 4) \quad \text{答}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{36} = 6 \quad \text{答}$$

4 ベクトルの内積

まとめ

1 ベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, そのなす角 θ を平面上の場合と同様に定義し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ も同じ式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ で定義する。

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

2 ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のなす角を θ とする。ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。このとき

$$[1] \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$[2] \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

注意 [1]の式は, $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ。

3 ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$[1] \quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$[2] \quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

A ベクトルの内積

教 p.59

練習 10

次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$

(2) $\vec{a} = (2, 4, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$

指針 内積となす角 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ のとき、内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

また、なす角 θ は

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

から求める。(2)は、 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ が 0 でないことを確かめればよい。

解答 (1) 内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + (-3) \times 1 + 1 \times 2 = -7 \quad \text{答}$$

$$\text{また } |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 120^\circ \quad \text{答}$$

(2) 内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + 4 \times 1 + 3 \times 0 = 0 \quad \text{答}$$

また、 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ より $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ \quad \text{答}$$

練習
11

教 p.59

3点 A(6, 7, -8), B(5, 5, -6), C(6, 4, -2) を頂点とする
△ABC において、∠ABC の大きさを求めよ。

指針 三角形の内角 ∠ABC の大きさは $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ のなす角である。したがって、 $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ の内積と、 $|\vec{BA}|$, $|\vec{BC}|$ を求めてから、 $\cos \angle ABC$ の値を求める。

$$\text{解答 } \vec{BA} = (6-5, 7-5, -8-(-6)) = (1, 2, -2),$$

$$\vec{BC} = (6-5, 4-5, -2-(-6)) = (1, -1, 4)$$

であるから

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 4 = -9$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|}$$

$$= \frac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ \text{ であるから } \angle ABC = 135^\circ \quad \text{答}$$

B ベクトルの垂直

教 p.60

練習
12

2つのベクトル $\vec{a}=(2, 0, -1)$, $\vec{b}=(1, 3, -2)$ の両方に垂直で、大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

指針 2つのベクトルに垂直なベクトル $\vec{p}=(x, y, z)$ とする。

$\vec{a} \cdot \vec{p}=0$, $\vec{b} \cdot \vec{p}=0$, $|\vec{p}|=\sqrt{6}$ から, x, y, z の連立方程式を作って解く。

解答 $\vec{p}=(x, y, z)$ とする。

$\vec{a} \perp \vec{p}$ より $\vec{a} \cdot \vec{p}=0$ であるから

$$2 \times x + 0 \times y + (-1) \times z = 0$$

すなわち $2x - z = 0$ …… ①

$\vec{b} \perp \vec{p}$ より $\vec{b} \cdot \vec{p}=0$ であるから

$$1 \times x + 3 \times y + (-2) \times z = 0$$

すなわち $x + 3y - 2z = 0$ …… ②

$|\vec{p}|^2 = (\sqrt{6})^2$ であるから $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ …… ③

①, ②から, y, z を x で表すと $y=x, z=2x$ …… ④

これらを③に代入すると $x^2 + x^2 + (2x)^2 = 6$

整理すると $6x^2 = 6$ ゆえに $x^2 = 1$

これを解くと $x = \pm 1$ よって, ④から

$x=1$ のとき $y=1, z=2$

$x=-1$ のとき $y=-1, z=-2$

□ $\vec{p}=(1, 1, 2), (-1, -1, -2)$

注意 □のベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p}=(\pm 1, \pm 1, \pm 2)$ (複号同順)と書いてもよい。

5 ベクトルの図形への応用

まとめ

1 位置ベクトル

空間においても点 O を定めておくと, どんな点 P の位置も, ベクトル $\vec{p}=\vec{OP}$ によって決まる。

このようなベクトル $\vec{p}$ を点 O に関する点 P の位置ベクトルという。

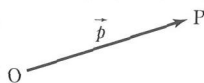
空間においても点 P の位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを $P(\vec{p})$ で表す。

以下, とくに断らない限り, 点 O に関する位置ベクトルを考える。

平面上の場合と同様に, 次のことが成り立つ。

[1] 2点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ に対して $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

[2] 2点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点, $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは



$$\text{内分} \dots \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad \text{外分} \dots \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

とくに、線分 AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

[3] 3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

2 一直線上にある点

2点 A, B が異なるとき

点 C が直線 AB 上にある $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある

3 同じ平面上にある点(1)

一直線上にない3点 A, B, C の定める平面 ABC がある。この平面上に点 P があるとき

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

となる実数 s, t がただ1組定まる。

逆に、この式を満たす実数 s, t があるとき、

点 P は平面 ABC 上にある。よって、次のことが成り立つ。

点 P が平面 ABC 上にある $\Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t がある

4 同じ平面上にある点(2)

一直線上にない3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) と点 P($\vec{p}$) について

点 P が平面 ABC 上にある

$\Leftrightarrow \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, s+t+u=1$ となる実数 s, t, u がある

解説 $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ から

$$\vec{p} - \vec{c} = s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c})$$

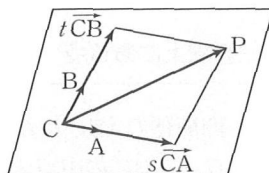
$$\text{よって } \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}$$

$$1-s-t=u \text{ とおくと } s+t+u=1 \quad \text{終}$$

5 内積の利用

内積を利用して、垂直の証明をすることができる。

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}, \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ のとき $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$

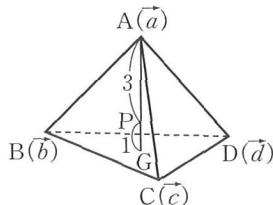


A 位置ベクトル

練習 13

4点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$), D($\vec{d}$) を頂点とする四面体 ABCD において、 $\triangle BCD$ の重心を G($\vec{g}$)、線分 AG を 3:1 に内分する点を P($\vec{p}$) とする。

$\vec{p}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ。



教 p.61

指針 内分する点の位置ベクトル まず、ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を使って表す。
次に、ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{g}$ を使って表す。

解答 $\triangle BCD$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

線分 AG を $3:1$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

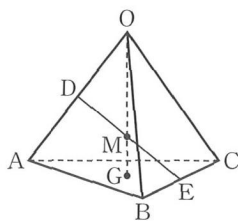
$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{4} = \frac{\vec{a} + 3\left(\frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}\right)}{4} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \quad \text{答}\end{aligned}$$

B 一直線上にある点

練習 14

四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D 、辺 BC の中点を E とする。

線分 DE の中点を M 、 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、3点 O, M, G は一直線上にあることを証明せよ。



教 p.62

指針 3点がい一直線上にあることの証明 O に関する位置ベクトルを考え、 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ として、 $\vec{OM}, \vec{OG}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表し、 $\vec{OG} = k\vec{OM}$ となる実数 k があることを示す。

解答 O に関する位置ベクトルを考える。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とすると

$$\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OE} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

であるから

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OD} + \vec{OE}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

また、 $\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ であるから

$$\vec{OG} = \frac{4}{3}\vec{OM}$$

よって、3点 O, M, G は一直線上にある。 終

C 同じ平面上にある点

教 p.63

練習
15

3点 $A(-1, 2, -1)$, $B(2, -2, 3)$, $C(2, 4, -1)$ の定める平面 ABC 上に点 $P(x, 3, 1)$ があるとき, x の値を求めよ。

指針 同じ平面上にある点 P は平面 ABC 上にあるから,
 $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t がある。このことを利用する。

解答 P は平面 ABC 上にあるから, $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ とおく。

$$\overrightarrow{CP} = (x-2, -1, 2), \overrightarrow{CA} = (-3, -2, 0), \overrightarrow{CB} = (0, -6, 4)$$

$$\text{であるから } (x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$$

$$\text{すなわち } (x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$$

$$\text{よって } x-2 = -3s \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad -1 = -2s-6t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$2 = 4t \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ から } t = \frac{1}{2} \quad \textcircled{2} \text{ に代入して } s = -1$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して } x = -3 \times (-1) + 2 = 5 \quad \text{答}$$

2 章

空間のベクトル

練習
16

教 p.64

四面体 OABC において, 辺 OA の中点を M, 辺 BC を 1:2 に内分する点を Q, 線分 MQ の中点を R とし, 直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

指針 線分の比と位置ベクトル P は平面 ABC 上にあるから, s, t を実数として
 $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ と表されることを利用する。また, P は OR 上にあり,
 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ (k は実数) から, $\overrightarrow{OP}$ を $k, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表すことができる。

解答 P は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

となる実数 s, t がある。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$$

$$= \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c})$$

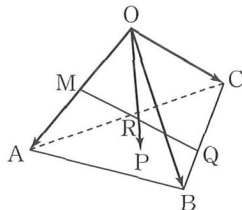
$$= s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, P は直線 OR 上にあるから, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k がある。

よって

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR} = k\left(\frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}}{2}\right) = \frac{1}{2}k\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

であるから、②に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \quad \cdots \cdots ③\end{aligned}$$

4点O, A, B, Cは同じ平面上にないから、 $\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである。

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{から} \quad s = \frac{1}{4}k, \quad t = \frac{1}{3}k, \quad 1-s-t = \frac{1}{6}k$$

$$\text{これを解くと, } k = \frac{4}{3} \text{ であるから} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} \quad \text{答}$$

$$\text{別解} \quad \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

Pは直線OR上にあるから、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ となる実数kがある。

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c}$$

$$\text{Pは平面ABC上にあるから} \quad \frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$\text{これを解くと, } k = \frac{4}{3} \text{ であるから} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} \quad \text{答}$$

D 内積の利用

教 p.66

練習 17

正四面体ABCDにおいて、 $\triangle BCD$ の重心をGとすると、 $AG \perp BC$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

指針 垂直の証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{g}$ とし、 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ を示す。

正四面体の各面が正三角形であることを利用する。

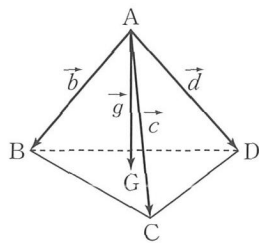
解答 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{g}$ とすると、

点Gは $\triangle BCD$ の重心であるから

$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{g} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \left(\frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{b})\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b}}{3} \\
 &= \frac{-|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b}}{3} \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては、 $\vec{d}$ と $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ と $\vec{b}$ のなす角は、ともに 60° であるから

$$\begin{aligned}
 \vec{d} \cdot \vec{c} &= |\vec{d}| |\vec{c}| \cos 60^\circ, \quad \vec{d} \cdot \vec{b} = |\vec{d}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\
 |\vec{b}| &= |\vec{c}| = |\vec{d}| \text{ であるから } \vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b} \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

$$\text{また } |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \dots\dots ③$$

$$\text{①, ②, ③から } \vec{AG} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\vec{AG} \neq \vec{0}, \vec{BC} \neq \vec{0} \text{ であるから } \vec{AG} \perp \vec{BC}$$

したがって $\vec{AG} \perp \vec{BC}$ 〔終〕

6 座標空間における図形

まとめ

1 2点間の距離と内分点・外分点の座標

座標空間の2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

$$[1] \quad A, B \text{ 間の距離は } AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

[2] 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

2 平面の方程式

点 $C(0, 0, c)$ を通り、 xy 平面に平行な平面を α とする。平面 α 上にあるどんな点 P の z 座標も c である。すなわち、平面 α は方程式 $z=c$ …… ① を満たす点 (x, y, z) の全体である。

① を平面 α の方程式 という。

3 座標平面に平行な平面の方程式

点 $A(a, 0, 0)$ を通り、 yz 平面に平行な平面の方程式は $x=a$

点 $B(0, b, 0)$ を通り、 zx 平面に平行な平面の方程式は $y=b$

点 $C(0, 0, c)$ を通り、 xy 平面に平行な平面の方程式は $z=c$

注意 平面 $x=a$ は x 軸に垂直、平面 $y=b$ は y 軸に垂直、平面 $z=c$ は z 軸に垂直である。

4 球面, 球

空間において, 定点 C からの距離が一定の値 r であるような点の全体を, C を中心とする半径 r の球面, または単に 球 という。

5 球面の方程式

点 (a, b, c) を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

とくに, 原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

A 2点間の距離と内分点・外分点の座標

教 p.67

練習
18

2点 $A(1, 3, -2)$, $B(4, -3, 1)$ について, 次のものを求めよ。

- (1) 2点 A, B 間の距離 (2) 線分 AB の中点の座標
(3) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標
(4) 線分 AB を 2:1 に外分する点の座標

指針 2点間の距離と内分点・外分点 前ページのまとめで示した公式にあてはめて求める。中点の座標は 1:1 に内分する点の座標である。

解答 (1) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + \{(-3)-3\}^2 + \{1-(-2)\}^2}$
 $= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ 答

(2) $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{(-2)+1}{2}\right)$

すなわち $\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ 答

(3) $\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{2+1}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2+1}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{2+1}\right)$

すなわち $(3, -1, 0)$ 答

(4) $\left(\frac{-1 \times 1 + 2 \times 4}{2-1}, \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2-1}, \frac{-1 \times (-2) + 2 \times 1}{2-1}\right)$

すなわち $(7, -9, 4)$ 答

教 p.67

練習
19

3点 $A(2, -1, 4)$, $B(1, 3, 0)$, $C(3, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を, 原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

指針 重心の座標 $\triangle ABC$ の重心を G とすると $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

解答 $\triangle ABC$ の重心を G とすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

と表されるから、 $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{(-1)+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3} \right)$$

すなわち $(2, 1, 2)$ 答

2章

空間のベクトル

B 座標平面に平行な平面の方程式

教 p.68

練習
20

点 $(1, 2, 3)$ を通り、次のような平面の方程式を求めよ。

- (1) xy 平面に平行 (2) yz 平面に平行 (3) y 軸に垂直

指針 座標平面に平行な平面の方程式

(1), (2) それぞれどの座標軸に垂直か考える。

解答 (1) z 軸に垂直な平面で、平面上のどんな点の z 座標も 3 であるから

$$z=3 \quad \text{答}$$

(2) x 軸に垂直な平面で、平面上のどんな点の x 座標も 1 であるから

$$x=1 \quad \text{答}$$

(3) y 軸に垂直な平面で、平面上のどんな点の y 座標も 2 であるから

$$y=2 \quad \text{答}$$

C 球面の方程式

教 p.69

練習
21

次のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 原点を中心とする半径 3 の球面
 (2) 点 $(1, 2, -3)$ を中心とする半径 4 の球面
 (3) 点 $A(0, 4, 1)$ を中心とし、点 $B(2, 4, 5)$ を通る球面
 (4) 2 点 $A(2, 0, -3)$, $B(-2, 6, 1)$ を直径の両端とする球面

指針 球面の方程式 前ページのまとめの球面の方程式にあてはめる。

(3) 半径を r とすると $r^2 = AB^2$

(4) 球面の中心は線分 AB の中点でありこの中心を C とすると、半径は CA , または CB の長さである。

解答 (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$

$$\text{すなわち } x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{答}$$

(2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

$$\text{すなわち } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16 \quad \text{答}$$

(3) この球面の半径を r とすると

$$r^2 = AB^2 = (2-0)^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2 = 20$$

よって、求める球面の方程式は

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20 \quad \text{答}$$

- (4) 線分 AB の中点を C とすると、この球面の中心は点 C で、半径は線分 CA の長さである。

$$C \text{ の座標は } \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{(-3)+1}{2} \right)$$

$$\text{すなわち } (0, 3, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } CA &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + \{-3-(-1)\}^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

よって、求める球面の方程式は

$$x^2 + (y-3)^2 + \{z-(-1)\}^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$\text{すなわち } x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17 \quad \text{答}$$

- 別解** (3) 求める球面の方程式は、半径を r とすると

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = r^2$$

この球面が点 B(2, 4, 5) を通るから

$$2^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2 = r^2$$

$$\text{ゆえに } r^2 = 20$$

$$\text{よって、求める球面の方程式は } x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20 \quad \text{答}$$

練習 22

教 p.70

教科書の応用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。
その円の中心の座標と半径を求めよ。

指針 球面と yz 平面が交わる部分 yz 平面は方程式 $x=0$ で表される。

球面の方程式で $x=0$ とすると、 y, z の 2 次方程式が得られる。この方程式は、球面が yz 平面と交わる部分、すなわち、 yz 平面上の円を表す。

解答 球面の方程式で、 $x=0$ とすると

$$(0-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち } (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

$$\leftarrow 5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$$

この方程式は、 yz 平面上では円を表す。

よって、その中心の座標は $(0, -2, 3)$ 、半径は 3 **答**

注意 練習 22 の円は、次のような 2 つの方程式で表される。

$$(y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2, \quad x=0$$

発展 平面の方程式

まとめ

平面の方程式

点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$

に垂直な平面 α 上の点を $P(x, y, z)$ とする。

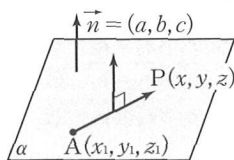
P が A に一致しないとき、 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ であるから

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ …… ① が成り立つ。

P が A に一致するときも、 $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ より ① が成り立つ。

この等式を成分で表した次の式が平面 α を表す方程式である。

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$



2 章

空間のベクトル

教 p.70

練習
1

点 $(3, 1, -1)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (2, -1, 4)$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

方針 平面の方程式 点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式は $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

解答 求める平面の方程式は

$$2(x - 3) - (y - 1) + 4\{z - (-1)\} = 0$$

すなわち $2x - y + 4z = 1$ 答

コラム ベクトルの外積

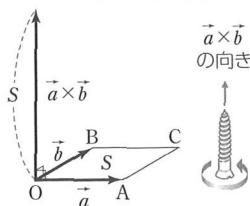
まとめ

外積 空間のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について、次の 2 つの性質を満たすベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積といい、 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す。

- $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直なベクトルである。ただし、向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の角度 θ でまわるとき、右ねじの進む向きと定める。

- 大きさは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でできる平行四辺形の面積である。

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ 、または $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のときは $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$



確認

教 p.71

座標空間において、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ とする。このとき、 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ を、それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ で表してみよう。

解答 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ 罫
 $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ 罫
 $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ 罫

発見

教 p.71

ベクトルの外積には、内積と同じように、次の性質があります。

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ から、上の性質を利用して、外積の成分表示を求める方法を考えてみよう。

解答 $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$ と変形することができる。
 これを、与えられた性質を用いて $\bigcirc\vec{e}_1 + \square\vec{e}_2 + \triangle\vec{e}_3$ の形で表すことができれば、外積の成分表示は $(\bigcirc, \square, \triangle)$ である。罫

まとめ

教 p.71

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積を $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とするとき、次のことを示してみよう。

$$x_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad x_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad x_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

指針 上の 発見 で考えた方法で示す。

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$) は、上の確認の考えと同様にすべて求められる。よって、それらを用いて $\vec{a} \times \vec{b} = \bigcirc\vec{e}_1 + \square\vec{e}_2 + \triangle\vec{e}_3$ と表せば x_1, x_2, x_3 のいずれも示すことができる。

解答 それぞれの単位ベクトルの外積の計算は以下ようになる。

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0} & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0} & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0} \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + a_2b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + a_3b_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3b_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 b_2 \vec{e}_3 - a_1 b_3 \vec{e}_2 - a_2 b_1 \vec{e}_3 + a_2 b_3 \vec{e}_1 + a_3 b_1 \vec{e}_2 - a_3 b_2 \vec{e}_1 \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

したがって、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とするとき

$$x_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad x_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad x_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{終}$$

第2章

問題

教 p.72

- 1 $\vec{p} = (-1, 5, 0)$ を、3つのベクトル $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$, $\vec{c} = (2, -3, 1)$ と適当な実数 s, t, u を用いて、 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形に表せ。

指針 ベクトルの分解 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の関係を成分で表す。この関係式から、 s, t, u の値を求める。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } (-1, 5, 0) &= s(1, -2, 3) + t(-2, 1, 0) + u(2, -3, 1) \\
 &= (s - 2t + 2u, -2s + t - 3u, 3s + u)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } s - 2t + 2u = -1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$-2s + t - 3u = 5 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$3s + u = 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{③から } u = -3s \quad \cdots \cdots \text{④}$$

④を①、②に代入して、それぞれ整理すると

$$5s + 2t = 1 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$7s + t = 5 \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

$$\text{⑤、⑥を解いて } s = 1, t = -2$$

$$s = 1 \text{ を④に代入して } u = -3$$

$$\text{したがって } \vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c} \quad \text{答}$$

教 p.72

- 2 2つのベクトル $\vec{a} = (5, -2+t, 1+2t)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$ のなす角が 45° になるように、 t の値を定めよ。

指針 ベクトルのなす角 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° であるから $\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ より、 t の方程式を導き、それを解く。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \times 1 + (-2+t) \times 0 + (1+2t) \times 0 = 5 \\
 |\vec{a}| &= \sqrt{5^2 + (-2+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{5t^2 + 30} \\
 |\vec{b}| &= 1
 \end{aligned}$$

であるから、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5t^2+30}}$$

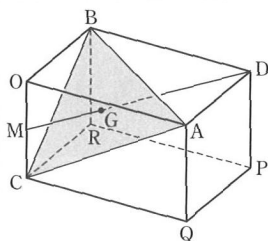
$$\theta = 45^\circ \text{ のとき } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であるから } \frac{5}{\sqrt{5t^2+30}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

両辺を2乗して整理すると $t^2 = 4$

これを解いて $t = \pm 2$ 答

教 p.72

- 3 右の図のような直方体において、 $\triangle ABC$ の重心を G 、辺 OC の中点を M とするとき、点 G は線分 DM 上にあり、 DM を $2:1$ に内分することを証明せよ。



指針 内分する点 線分 DM を $2:1$ に内分する点を G' とし、この点 G' が $\triangle ABC$ の重心 G と一致することを示す。または $\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{MG}$ を導いて、点 G が DM 上の点で、 $GD:MG=2:1$ を示してもよい。

解答 線分 DM を $2:1$ に内分する点を G' とすると

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OM}}{2+1} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OM}}{3}$$

点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OM}}{3} \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG}$

したがって、2点 G' 、 G は一致するから、点 G は線分 DM 上にあり、 DM を $2:1$ に内分する。 終

$$\begin{aligned} \leftarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{OM} \text{ (MはOCの中点)} \end{aligned}$$

教 p.72

- 4 3点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 2, 1)$ 、 $B(-1, 0, 1)$ から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

指針 3点から等距離にある点の座標 点 $P(x, y, z)$ として、3点から等距離にあることと、 yz 平面上にあることから方程式を作る。

解答 点 P は yz 平面上にあるから、 P の座標を $(0, y, z)$ とする。

また、点 P は3点 O 、 A 、 B から等距離にあるから

$$OP=AP, \quad OP=BP$$

$$\text{すなわち} \quad OP^2=AP^2, \quad OP^2=BP^2$$

$$\text{ゆえに} \quad 0^2+y^2+z^2=(0-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0^2+y^2+z^2=(0+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{を展開して整理すると} \quad 2z=2 \quad \text{よって} \quad z=1$$

$$\textcircled{1} \text{を展開して整理すると} \quad 4y+2z=6$$

$$\text{すなわち} \quad 2y+z=3 \quad z=1 \text{を代入すると} \quad y=1$$

したがって、点 P の座標は $(0, 1, 1)$ ㊟

教 p.72

5 2点 A(4, 0, 5), B(0, 2, 1)を通る直線上の点のうち、原点 O との距離が最小となる点を P とする。

(1) 直線 AB と直線 OP の間に成り立つ関係を予想せよ。

(2) 点 P の座標を求めよ。また、(1)で予想した関係が成り立つことを示せ。

指針 直線に下ろした垂線の交点の座標と長さ

(1) 平面上の点と直線の距離と同様に考えると、O から AB に下ろした垂線が OP になると予想される。

(2) 直線 AB 上の点の座標は $(4-4t, 2t, 5-4t)$ と表すことができる。

これと O の距離が最小になるような t の値を求めれば P の座標が求められる。 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BA}$ であることは、求めた P が $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を満たすことを示せばよい。

解答 (1) 直線 AB 上の点を Q とすると、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

と表される。

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OQ} = (4, 0, 5) + t(-4, 2, -4)$$

$$= (4-4t, 2t, 5-4t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって、直線 AB は原点 O を通らない。

3点 O, A, B を含む平面で考えると、原点 O との距離が最小となる点 P に対しては、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OP}$ であると予想される。㊟

(2) (1)の①から、直線 AB 上の点 Q の座標は

$$(4-4t, 2t, 5-4t) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表される。

$$\text{ゆえに} \quad OQ^2 = (4-4t)^2 + (2t)^2 + (5-4t)^2$$

$$= 36t^2 - 72t + 41$$

$$= 36(t-1)^2 + 5$$

よって、 OQ^2 は $t=1$ のとき最小となり、このとき、 OQ も最小となる。

したがって、点 P の座標は②において $t=1$ としたときに等しい。

すなわち、点 P の座標は $(0, 2, 1)$ 〇

このとき $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = (-4) \times 0 + 2 \times 2 + (-4) \times 1 = 0$

ゆえに $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OP}$

よって、 $AB \perp OP$ が成り立つ。 〇

第2章 章末問題 A

教 p.73

1. 四面体 ABCD の辺 AD の中点を M, 辺 BC の中点を N とするとき,
 $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{DC}$ を満たす実数 s, t の値を求めよ。

指針 ベクトルの分解 $\overrightarrow{MN}$ を 2 通りに表してみる。

位置ベクトル $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ を考え, $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表してみてもよい。

解答
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

点 M, N はそれぞれ AD, BC の中点であるから

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{CN}$$

これと, ①+②より $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

よって
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

したがって, $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{DC}$ を満たす実数 s, t の値は

$$s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

別解 位置ベクトル $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ を考えると, 点 M, N の位置ベクトルは, それぞれ $\frac{\vec{a} + \vec{d}}{2}, \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

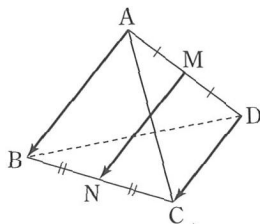
よって
$$\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{d}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{d})$$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$ であるから

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

したがって, $\overrightarrow{MN} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{DC}$ を満たす実数 s, t の値は

$$s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$



教 p.73

2. 座標空間に平行四辺形 ABCD があり, $A(1, 2, 1), B(5, 5, -1),$
 $C(x, y, z), D(-4, 2, 3)$ であるとする。 x, y, z の値を求めよ。

指針 平行四辺形の頂点の決定 四角形 ABCD が平行四辺形であるから

$$AD=BC, AD \parallel BC \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

これを満たす x, y, z の値を求める。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= (-4-1, 2-2, 3-1) \\ &= (-5, 0, 2) \\ \overrightarrow{BC} &= (x-5, y-5, z-(-1)) \\ &= (x-5, y-5, z+1) \end{aligned}$$

四角形 ABCD は平行四辺形であるから $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\text{すなわち} \quad x-5=-5, \quad y-5=0, \quad z+1=2$$

$$\text{よって} \quad x=0, \quad y=5, \quad z=1 \quad \text{答}$$

教 p.73

3. $\vec{a}=(1, 3, -2), \vec{b}=(1, -2, 0)$ と実数 t に対して, $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。
 $\vec{b} \perp \vec{p}$ となるような t の値を求めよ。また, このときの $|\vec{p}|$ を求めよ。

指針 ベクトルの垂直条件 $\vec{p}$ の成分は t の 1 次式で表されるから, ベクトルの垂直条件を用いて, t の値を求める。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \vec{p} &= \vec{a} + t\vec{b} = (1, 3, -2) + t(1, -2, 0) \\ &= (1+t, 3-2t, -2) \end{aligned}$$

$\vec{b} \perp \vec{p}$ より $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ であるから

$$1 \times (1+t) + (-2) \times (3-2t) + 0 \times (-2) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 1+t-6+4t=0$$

$$\text{よって} \quad t=1 \quad \text{答}$$

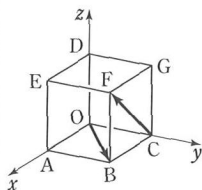
$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \vec{p} &= (1+1, 3-2 \times 1, -2) \\ &= (2, 1, -2) \end{aligned}$$

$$\text{であるから} \quad |\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \quad \text{答}$$

教 p.73

4. 右の図の立方体 OABC-DEFG は, 1 辺の長さが 2 である。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ を成分表示せよ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CF}$ を求めよ。
- (3) ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ のなす角を求めよ。



指針 ベクトルの内積

(1) まず, 点 B, C, F の座標をそれぞれ求める。

(2), (3) ベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

解答 (1) 点 B, C, F の座標は, それぞれ

$$B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), F(2, 2, 2)$$

$$\text{よって } \vec{OB} = (2, 2, 0) \quad \text{答}$$

$$\vec{CF} = (2-0, 2-2, 2-0)$$

$$= (2, 0, 2) \quad \text{答}$$

$$(2) (1) \text{ から } \vec{OB} \cdot \vec{CF} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 2$$

$$= 4 \quad \text{答}$$

$$(3) |\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{CF}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\vec{OB}$ と $\vec{CF}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{CF}}{|\vec{OB}| |\vec{CF}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 60^\circ \quad \text{答}$$

教 p.73

5. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を, それぞれ x 軸, y 軸, z 軸に関する基本ベクトルとし, ベクトル $\vec{a} = (-1, \sqrt{2}, 1)$ と $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ のなす角を, それぞれ α, β, γ とする。

(1) $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ の値を求めよ。

(2) α, β, γ を求めよ。

指針 ベクトルのなす角

(1) まず $\vec{a}$ と $\vec{e}_1$, $\vec{a}$ と $\vec{e}_2$, $\vec{a}$ と $\vec{e}_3$ のそれぞれの内積を求める。

(2) (1) で求めた $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ の値からそれぞれ α, β, γ を求める。

解答 (1) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = (-1) \times 1 = -1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_3 = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{また } |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$$

であるから

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = -\frac{1}{2} \quad \text{答}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e_2}}{|\vec{a}| |\vec{e_2}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{答}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e_3}}{|\vec{a}| |\vec{e_3}|} = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

- (2) $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ であるから, (1)より
 $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ 答

教 p.73

6. 2点 $A(1, 2, 2)$, $B(2, 3, 4)$ に対して, A , B から等距離にある x 軸上の点を P とする。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
 (2) $\triangle ABP$ の重心 G の座標を求めよ。

指針 等距離にある点の座標

- (1) 点 P は x 軸上の点であるから, その座標は $(x, 0, 0)$ とおくことができる。

解答 (1) 点 P は x 軸上の点であるから, P の座標を $(x, 0, 0)$ とおく。

$$AP = BP \text{ であるから } AP^2 = BP^2$$

$$\text{ゆえに } (x-1)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2$$

$$\text{これを整理すると } 2x = 20$$

$$\text{よって } x = 10$$

したがって, 点 P の座標は $(10, 0, 0)$ 答

- (2) O を原点とすると $\vec{OA} = (1, 2, 2)$, $\vec{OB} = (2, 3, 4)$, $\vec{OP} = (10, 0, 0)$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP}}{3} \\ &= \left(\frac{1+2+10}{3}, \frac{2+3+0}{3}, \frac{2+4+0}{3} \right) \\ &= \left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right) \end{aligned}$$

よって, $\triangle ABP$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right) \quad \text{答}$$

7. 球面 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 5^2$ と平面 $z=3$ が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

指針 球面が平面と交わってできる図形 球面の方程式に $z=3$ を代入すると、円の方程式になる。

解答 球面が平面 $z=3$ と交わるから

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (3-4)^2 = 5^2$$

よって

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 24, \quad z=3$$

← $z=3$ を忘れないように。

すなわち

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{6})^2, \quad z=3$$

したがって、球面 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 5^2$ が平面 $z=3$ と交わってできる円の 中心の座標は $(2, -3, 3)$,

半径は $2\sqrt{6}$ 答

注意 球面と平面が交わってできる円は、平面 $z=3$ 上にあるから、その中心の座標は $(2, -3, 3)$ である。 $(2, -3)$ としないように注意する。

第2章 章末問題 B

教 p.74

8. 3点 $A(a, -1, 5)$, $B(4, b, -7)$, $C(5, 5, -13)$ が一直線上にあるとき, a, b の値を求めよ。

指針 一直線上にある3点 3点 A, B, C が一直線上にあれば, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k がある。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ をそれぞれ成分表示し, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ から k の値を求める。

解答 3点 A, B, C が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k がある。

$$\overrightarrow{AB} = (4-a, b-(-1), -7-5)$$

$$= (4-a, b+1, -12)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-a, 5-(-1), -13-5)$$

$$= (5-a, 6, -18)$$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \text{ から}$$

$$(4-a, b+1, -12) = k(5-a, 6, -18)$$

$$\text{ゆえに } 4-a = 5k - ka \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$b+1 = 6k \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$-12 = -18k \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{③から } k = \frac{2}{3}$$

$$\text{①から } 4-a = 5 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a$$

$$\text{よって } a = 2 \quad \text{答}$$

$$\text{また, ②から } b+1 = 6 \times \frac{2}{3}$$

$$\text{よって } b = 3 \quad \text{答}$$

教 p.74

9. 3点 $O(0, 0, 0)$, $A(-1, -2, 1)$, $B(2, 2, 0)$ を頂点とする $\triangle OAB$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle AOB$ の大きさを求めよ。 (2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ。

指針 ベクトルのなす角と三角形の面積

- (1) $\angle AOB$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角であるから

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

- (2) $\triangle OAB$ の面積 S は $S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \angle AOB$

解答 (1) $\vec{OA} = (-1, -2, 1)$, $\vec{OB} = (2, 2, 0)$ であるから

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (-1) \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = -6$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$ であるから $\angle AOB = 150^\circ$ 〔答〕

(2) $OA = |\vec{OA}| = \sqrt{6}$, $OB = |\vec{OB}| = 2\sqrt{2}$ であるから

$$S = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} \quad \text{〔答〕}$$

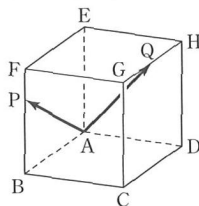
教 p.74

10. 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において、辺 BF 上に点 P をとり、辺 GH 上に点 Q をとる。

(1) 内積 $\vec{BP} \cdot \vec{HQ}$ を求めよ。

(2) 内積 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ を $|\vec{BP}|$, $|\vec{HQ}|$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ の最大値を求めよ。



指針 ベクトルの垂直・平行・内積

(1) $\vec{BP}$, $\vec{HQ}$ を, B, H が点 A に一致するように, それぞれ平行移動してみる。

(2) $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$, $\vec{AQ} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HQ}$ として, $\vec{AP}$ と $\vec{AQ}$ の内積を考える。

(3) (2) をもとにして考える。

解答 (1) $\vec{BP} \parallel \vec{AE}$, $\vec{HQ} \parallel \vec{AB}$ より $\vec{BP} \perp \vec{HQ}$ であるから $\vec{BP} \cdot \vec{HQ} = 0$ 〔答〕

(2) $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$

$$\vec{AQ} = \vec{AH} + \vec{HQ} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HQ}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{AQ} &= (\vec{AB} + \vec{BP}) \cdot (\vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HQ}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AB} \cdot \vec{EH} + \vec{AB} \cdot \vec{HQ} + \vec{BP} \cdot \vec{AE} \\ &\quad + \vec{BP} \cdot \vec{EH} + \vec{BP} \cdot \vec{HQ} \end{aligned}$$

ここで, $\vec{AB} \perp \vec{AE}$ から $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{EH}$ から $\vec{AB} \cdot \vec{EH} = 0$

$$\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{EH} \text{ から } \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$$

$$\text{また } \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HQ} = 0$$

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{HQ}| \cos 0^\circ + |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{AE}| \cos 0^\circ \\ &= 2|\overrightarrow{HQ}| + 2|\overrightarrow{BP}| \end{aligned}$$

$$\leftarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AE}| = 2, \cos 0^\circ = 1$$

$$\text{すなわち } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2|\overrightarrow{BP}| + 2|\overrightarrow{HQ}| \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ (2) から } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= 2|\overrightarrow{BP}| + 2|\overrightarrow{HQ}| \\ &\leq 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ の最大値は 8 答

教 p.74

11. 四面体 ABCD において、次のことが成り立つ。

$$AC \perp BD \text{ ならば } AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

指針 線分の長さの 2 乗とベクトルの内積 点 A に関する位置ベクトルを考え、線分の長さの 2 乗をベクトルの内積で表す。

解答 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。

$$AC \perp BD \text{ であるから } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\text{すなわち } \vec{c} \cdot (\vec{d} - \vec{b}) = 0$$

$$\text{ゆえに } \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{d}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } AB^2 + CD^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\text{よって } AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

$$\text{したがって } AC \perp BD \text{ ならば } AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 \quad \text{終}$$

12. 四面体 $OABC$ において, $\triangle ABC$ の重心を G , 辺 OB の中点を M , 辺 OC の中点を N とする。直線 OG と平面 AMN の交点を P とするとき, $OG : OP$ を求めよ。

指針 平面上の点の位置ベクトル O に関する位置ベクトルを考え, $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とする。 P が平面 AMN 上にあることと, 線分 OG 上にあることから, $\vec{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて2通りに表す。

解答 O に関する位置ベクトルを考え, $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とする。

P は平面 AMN 上にあるから, $\vec{AP} = s\vec{AM} + t\vec{AN}$ とおく。

点 M , N は辺 OB , OC それぞれの中点であるから

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + s\vec{AM} + t\vec{AN} \\ &= \vec{OA} + s(\vec{OM} - \vec{OA}) + t(\vec{ON} - \vec{OA}) \\ &= \vec{a} + s\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= (1-s-t)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

P は線分 OG 上にあるから, $OG : OP = 1 : k$ とおくと

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k\vec{OG} = \frac{1}{3}k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c} \quad \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

4点 O , A , B , C は同じ平面上にないから, $\vec{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りである。

$$①, ② \text{ から } 1-s-t = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}s = \frac{1}{3}k, \quad \frac{1}{2}t = \frac{1}{3}k$$

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{3}k \text{ から } s = \frac{2}{3}k, \quad \frac{1}{2}t = \frac{1}{3}k \text{ から } t = \frac{2}{3}k$$

$$1 - \frac{2}{3}k - \frac{2}{3}k = \frac{1}{3}k \text{ より } k = \frac{3}{5} \text{ であるから}$$

$$OG : OP = 1 : \frac{3}{5} = 5 : 3 \quad \text{答}$$